5.2.8 Vzdálenost bodu od přímky

Předpoklady: 5207

Pedagogická poznámka: Třída počítá samostatně. Patnáct minut před koncem se sejdeme na příklad 4 a), který pak řešíme společně.

Vzdálenost bodů *A*, *B* je rovna délce úsečky *AB*, značíme $|AB|$.

Vzdálenost bodu *A* od přímky *p*: Bod *A* a přímka *p* určují rovinu, v ní postupujeme stejně jako v planimetrii $\Rightarrow$ určíme vzdálenost bodu *A* a paty kolmice na přímku *p* jdoucí bodem *A*. Píšeme $|Ap|$ nebo $|A \leftrightarrow KL|$.

Je dána přímka *p* a bod *A*. Vzdáleností bodu *A* od přímky *p* rozumíme vzdálenost bodu *A* od bodu *P*, který je patou kolmice vedené v rovině *Ap* k přímce *p* z bodu *A*.

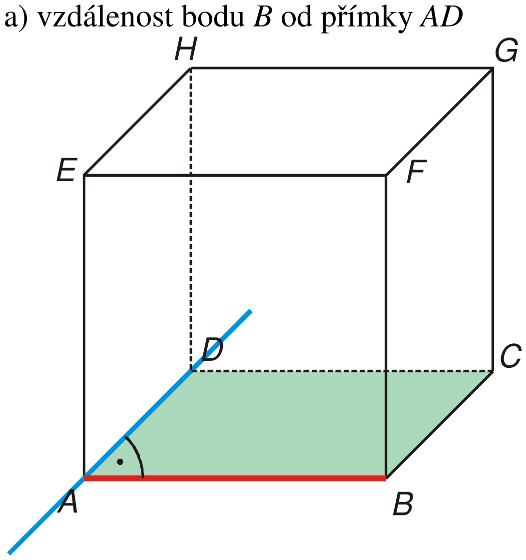
Př. 1: Porovnej definici vzdálenosti bodu *A* od přímky *p* s definicí odchylky přímky *p* od roviny ρ a najdi shodné rysy.

V obou definicích používáme kolmosti.
- Sestrojíme kolmici a s její pomocí patu.
- Sestrojíme kolmý průmět přímky do roviny.

V obou definicích získáme nejmenší hodnotu.
- Pata kolmice je pro bod *A* nejbližším bodem přímky *p*.
- Úhel mezi přímkou *p* a jejím kolmým průmětem do roviny ρ je nejmenší z úhlů mezi přímkou *p* a libovolnou přímkou roviny ρ.

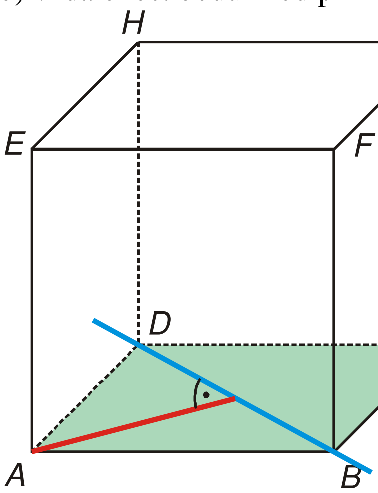
Př. 2: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*, $a = 4\,\text{cm}$. Urči:
a) vzdálenost bodu *B* od přímky *AD*, b) vzdálenost bodu *A* od přímky *BD*,
c) vzdálenost bodu *C* od přímky *EF*.

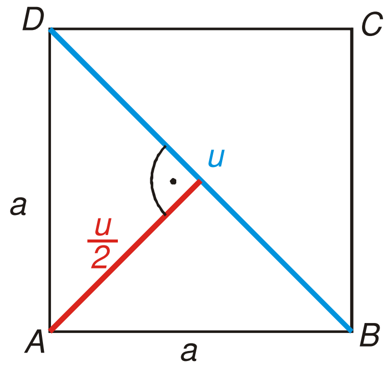
a) vzdálenost bodu *B* od přímky *AD*



Z obrázku vidíme, že platí $|B \leftrightarrow AD| = a = 4\,\text{cm}$.

b) vzdálenost bodu *A* od přímky *BD*





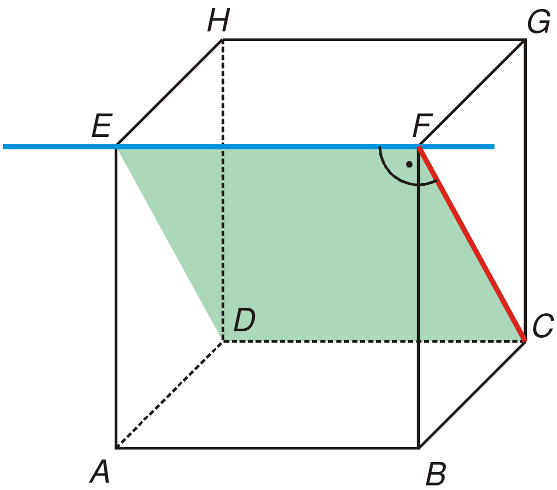
Hledaná vzdálenost je polovinou úhlopříčky podstavy.

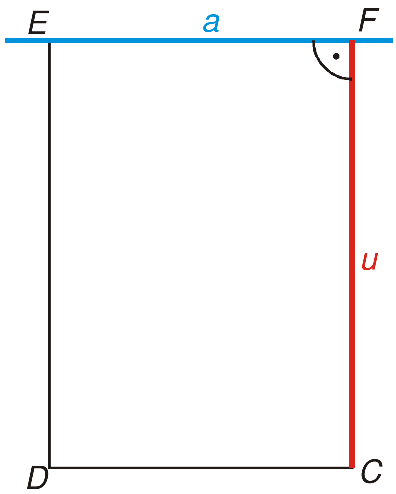
$u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$u = a\sqrt{2}$

$|A \leftrightarrow BD| = \dfrac{u}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\,\text{cm} = 2{,}83\,\text{cm}$

c) vzdálenost bodu *C* od přímky *EF*

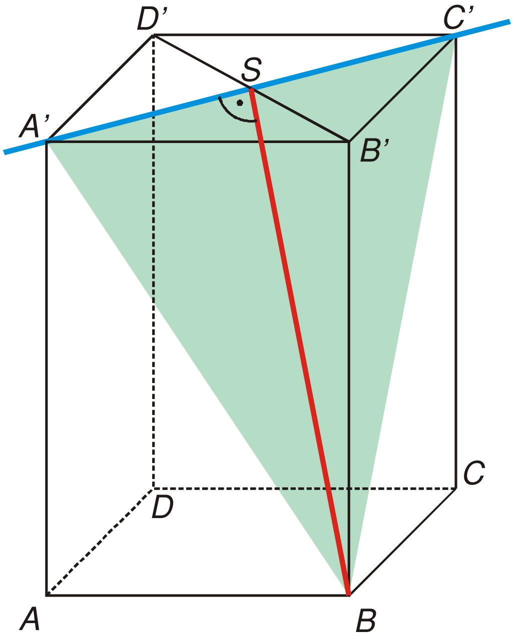




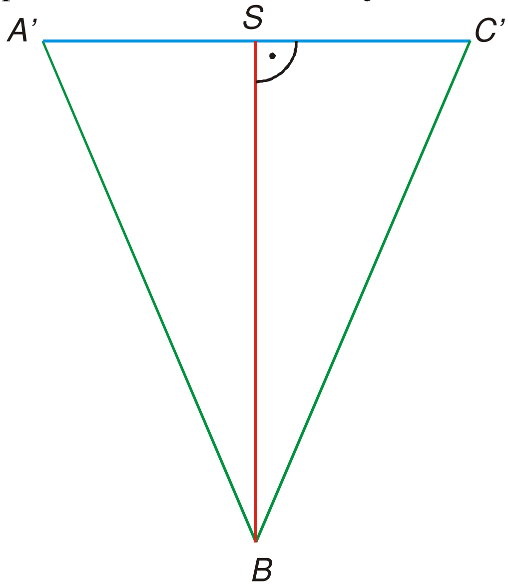
Hledaná vzdálenost je stranou obdélníku *CDEF* a také stěnovou úhlopříčkou krychle. Platí tedy: $|C \leftrightarrow EF| = u = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\,\text{cm} = 5{,}66\,\text{cm}$.

Pedagogická poznámka: Poměrně překvapivé procento studentů má problémy s bodem b), kde si nenakreslí samostatný obrázek podstavy a z průmětu krychle nepoznají, že hledaná vzdálenost je polovinou úhlopříčky.

Př. 3: Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDA'B'C'D'*, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$, $|AA'| = v = 6\,\text{cm}$. Urči vzdálenost bodu *B* od přímky *A'C'*.

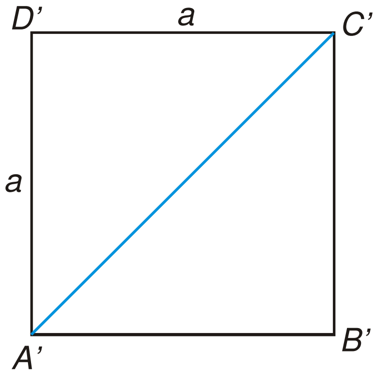


Z obrázku je vidět, že vzdálenost určíme pomocí rovnoramenného trojúhelníku *A'C'B*.



Abychom spočítali délku strany *BS*, musíme určit zbývající strany.

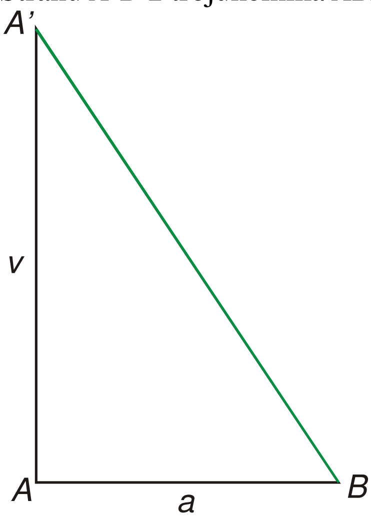
Stranu *A'C'* ze čtverce *A'B'C'D'*.



$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

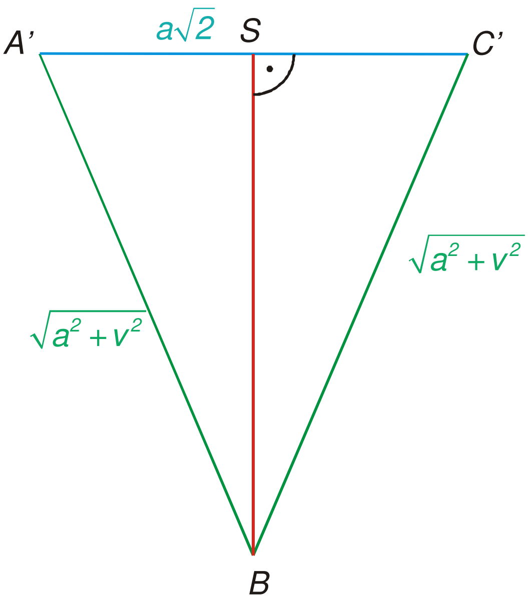
$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = |A'C'|$

Stranu *A'B* z trojúhelníka *ABA'*.



$c^2 = a^2 + v^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + v^2} = |A'B|$

Doplníme výsledky do obrázku.



Z pravoúhlého trojúhelníku $A'SB$.

$$|BS|^2 = |A'B|^2 - |A'S|^2 = \left(\sqrt{a^2+v^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

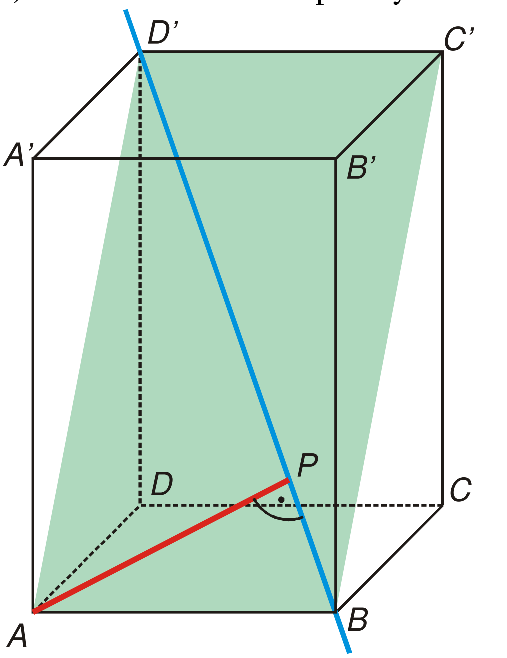
$$|BS|^2 = a^2 + v^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2 + v^2$$

$$|BS| = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + v^2}$$

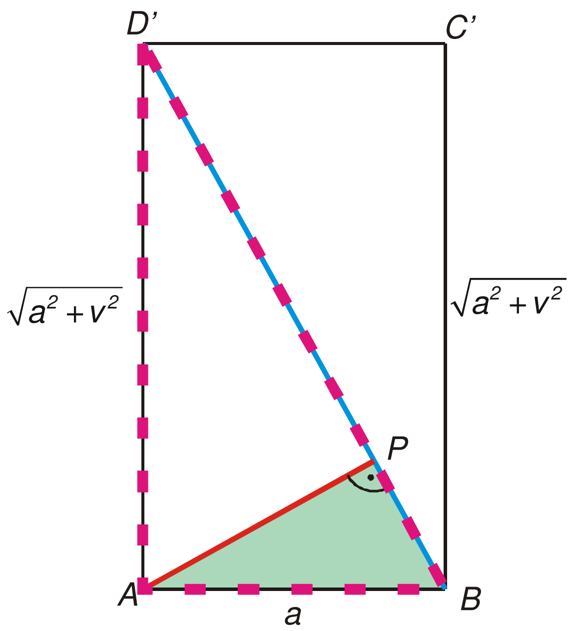
Dosazení: $|BS| = \sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2} = \sqrt{\frac{4^2}{2} + 6^2}\ \text{cm} = 6{,}63\,\text{cm}$

Př. 4: Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDA'B'C'D'*, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$, $|AA'| = v = 6\,\text{cm}$. Urči: a) vzdálenost bodu *A* od přímky *BD'*,
b) vzdálenost bodu *A'* od přímky $D'S_{BC}$.

a) vzdálenost bodu *A* od přímky *BD'*



Příklad řešíme v obdélníku *ABC'D'*.



Známe délky stran: $|AB| = a$, $|BC'| = \sqrt{a^2+v^2}$ (stěnová úhlopříčka).

Vyjdeme z podobnosti trojúhelníků ABP a $D'AB$:

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|D'A|}{|D'B|} \Rightarrow |AP| = |AB|\frac{|D'A|}{|D'B|}.$$

Úhlopříčka obdélníku $ABC'D'$:

$$|D'B|^2 = |AB|^2 + |D'A|^2 = a^2 + \left(\sqrt{a^2+v^2}\right)^2 = 2a^2 + v^2$$

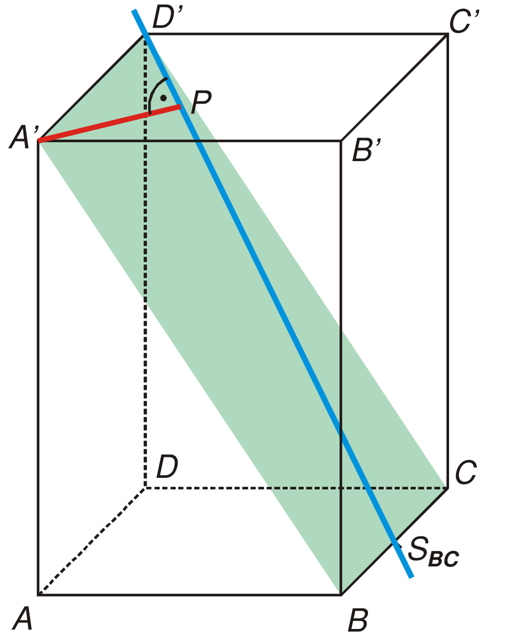
$$|D'B| = \sqrt{2a^2+v^2}$$

Dosadíme délky stran:

$$|AP| = |AB|\frac{|D'A|}{|D'B|} = \frac{a\sqrt{a^2+v^2}}{\sqrt{2a^2+v^2}}.$$

$$|AP| = \frac{a\sqrt{a^2+v^2}}{\sqrt{2a^2+v^2}} = \frac{4\sqrt{4^2+6^2}}{\sqrt{2\cdot 4^2+6^2}}\,\text{cm} = 3{,}50\,\text{cm}$$

b) vzdálenost bodu A' od přímky $D'S_{BC}$



Příklad řešíme v obdélníku $BCA'D'$:

Známe délky stran:

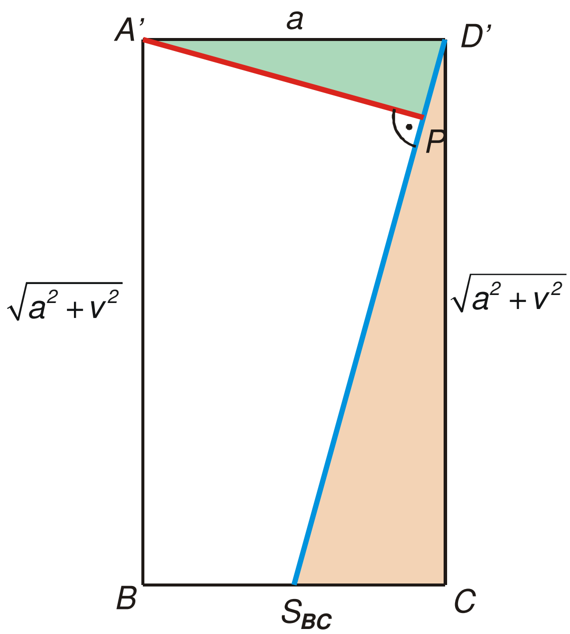
- $|BC| = a$
- $|CD'| = \sqrt{a^2+v^2}$ (stěnová úhlopříčka).

Vyjdeme z podobnosti trojúhelníků $A'D'P$ a $D'S_{BC}C$:

$$\frac{|A'P|}{|A'D'|} = \frac{|D'C|}{|D'S_{BC}|}$$

$$|A'P| = |A'D'|\frac{|D'C|}{|D'S_{BC}|}$$

Ještě musíme dopočítat stranu $D'S_{BC}$



v trojúhelníku $D'S_{BC}C$ (přepona):

$$|D'S_{BC}|^2 = |CD'|^2 + |S_{BC}C|^2 = \left(\sqrt{a^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|D'S_{BC}|^2 = a^2 + v^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2+4v^2}{4}$$

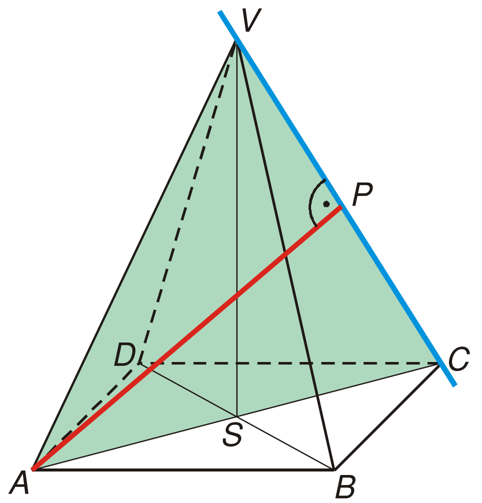
$$|D'S_{BC}| = \sqrt{\frac{5a^2+4v^2}{4}} = \frac{\sqrt{5a^2+4v^2}}{2}$$

Dosadíme do vztahu: $|A'P| = a\dfrac{\sqrt{a^2+v^2}}{\dfrac{\sqrt{5a^2+4v^2}}{2}} = \dfrac{2a\sqrt{a^2+v^2}}{\sqrt{5a^2+4v^2}}$

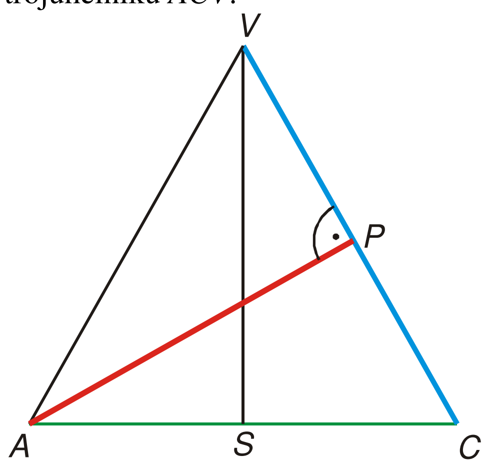
Dosazení: $|A'P| = \dfrac{2a\sqrt{a^2+v^2}}{\sqrt{5a^2+4v^2}} = \dfrac{2\cdot 4\sqrt{4^2+6^2}}{\sqrt{5\cdot 4^2+4\cdot 6^2}}\,\text{cm} = 3{,}85\,\text{cm}$

Poznámka: Body b) a c) je samozřejmě možné řešit místo v obdélnících pouze v trojúhelnících ABD' (případně $A'D'S_{BC}$).

Př. 5: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$, $|SV| = v = 5\,\text{cm}$. Urči vzdálenost vrcholu *A* od přímky *CV*.



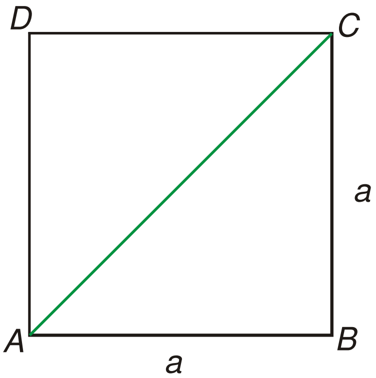
Vzdálenost určíme z rovnoramenného trojúhelníku *ACV*.



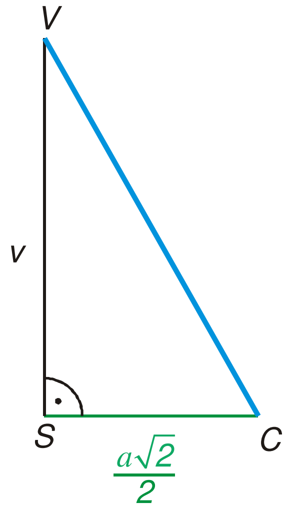
Nejdříve vypočteme délky stran v trojúhelníku *ACV*.

Stranu *AC* ze čtverce *ABCD*:

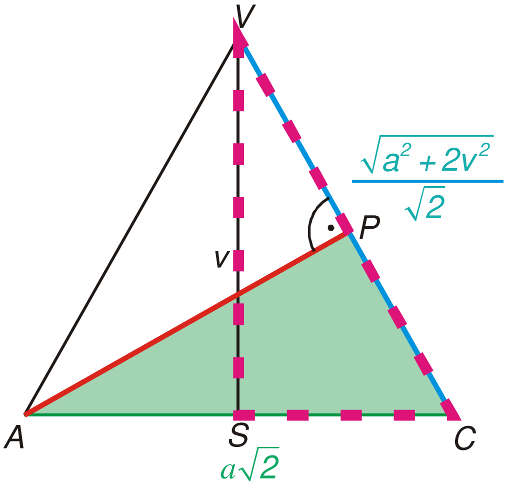
Stranu *CV* z pravoúhlého trojúhelníka *SCV*:



$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = |AC|$$



$$|CV|^2 = |SC|^2 + |SV|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{2a^2}{4} + v^2 = \frac{a^2 + 2v^2}{2}$$
$$|CV| = \frac{\sqrt{a^2 + 2v^2}}{\sqrt{2}}$$



Trojúhelníky ACP a VSC jsou si podobné.

$$\frac{|AP|}{|AC|} = \frac{|SV|}{|CV|}$$
$$|AP| = |AC|\frac{|SV|}{|CV|}$$

Dosadíme vypočtené délky stran:

$$|AP| = |AC|\frac{|SV|}{|CV|} = a\sqrt{2}\frac{v}{\frac{\sqrt{a^2+2v^2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}av}{\sqrt{a^2+2v^2}} = \frac{2av}{\sqrt{a^2+2v^2}}$$

Dosazení: $|AP| = \frac{2av}{\sqrt{a^2+2v^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 5}{\sqrt{4^2+2\cdot 5^2}}\,\text{cm} = 4{,}92\,\text{cm}$

Dodatek: Předchozí příklad můžeme spočítat také pomocí vzorce pro obsah trojúhelníku:

Platí: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} \Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b \Rightarrow$

v našem trojúhelníku konkrétně: $|CV| \cdot |AP| = |AC| \cdot |SV| \Rightarrow$

$|AP| = \frac{|AC| \cdot |SV|}{|CV|}$ - stejný vztah, jaký jsme získali použitím podobnosti.

Př. 6: Petáková:
strana 92/cvičení 17 f) h)
strana 92/cvičení 19 b) d)

Shrnutí: Vzdálenost bodu od přímky určujeme v rovině určené přímkou a bodem stejným způsobem jako v planimetrii.